數學其實可以很簡單

高中數學科素養導向課程設計及評量增能工作坊研習建言

數學科　黃順星老師

每學年新學期開始，迎接高一新生入學，在這些稚嫩的臉龐上，看到了對未來期許與夢想。此時的想法，除了喜悅的心情外，對於這一年該教給學生哪些內容?教法是否需要改變?這些反思都會年復一年的出現。個人有幸在本次工作坊聆聽台灣大學數學系張鎮華教授主講「素養導向的 108 數學課綱」，內容主軸在論素養、計算機在數學上的應用及數學評量方式。在聆聽之後，心中有些新的啟發，因此以「數學真的可以很簡單」為題撰述本文。

以下內文筆者嘗試用跟以往不同的數學教法，只談數學觀念，不做複雜的計算來教學的方式來呈現，並以三個數學觀念為例:

首先，在高中數學領域裡，吾人經常需要運用大約二週的時間來講解平面直線方程式，此乃二元一次方程式，含有 x,y 二個未知數，對應到直角坐標平面上的點座標 p(a,b) ，如公式(1)。過去傳統的教法，學生除了解方程式外，還要記住多個直線方程式家族，如點斜式、斜截式、二點式及截距式等，往往因為公式太多反而造成學習意願低落，學習成效變差。

$$\mathrm{L}: \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0 \ldots\ldots (1)$$

直線方程式的基本概念，重點在於「直線有唯一斜率」。如果可以用斜率的定義來講授，或許學生較容易理解。假設直線的斜率為 m，而點 p(a,b)正好在直線上，此時依直線斜率訂出公式(2)。經過移項後得出公式(3)，再帶入簡單的數字，就能整理出完整的直線方程式。

$$\mathrm{m} = \frac{y-b}{x-a} \ldots\ldots (2)$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{m}(\mathrm{x} - \mathrm{a}) + \mathrm{b} \ldots\ldots (3)$$

例如，當直線斜率為 2，點 p(3,4)在直線上，帶入可得公式(4)

$$\mathrm{y} = 2(\mathrm{x} - 3) + 4 \ldots\ldots (4)$$

整理後得到答案，如公式(5)

$$\mathrm{L}: 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - 2 = 0 \ldots\ldots (5)$$

用簡單的數字來講解基本概念就好。

第二個例子討論對數(log)，在舉這例子前，有個校園故事先跟大家分享。曾經一位數學小老師在畢業前最後一堂數學課給老師的回饋提到，「老師，你上課教的 109 我都聽不懂。」聽到學生關於對數的學習情況，不禁完爾一笑，這學生沒有對數的觀念，還把(log)看成(109)。

過去 500 年來，對數是繼 10 的乘方後產生的數學運算，也是對科技的進展偉大的貢獻。法國大數學家拉普拉斯 (Laplace, 1749-1827) 曾說過:「納皮爾對數的發明，不僅是減省了天文學家的工作，而且是相當於倍增其壽命。」顯見

對數在科學及工程應用上的重要性。

然而，隨著科技的進步，以及計算機工具問世，過去太多對數的延伸計算方法其實已經不太會用到了。在對數的運算性質裡，只要會下列公式(6-8)就夠了。更何況日常生活中常遇到的情況如地震的級別判斷，都是以 10 為底對數。在工程應用上，會加上以尤拉數(e)為底的自然對數而已。

$$\mathrm{logxy} = \mathrm{logx} + \mathrm{logy} \ldots\ldots (6)$$

$$\log\frac{x}{y} = logx - logy \ldots\ldots (7)$$

$$\mathrm{log}x^{a} = alogx \ldots\ldots (8)$$

在對數的教法方面?有沒有可能只教基本概念，教會學生能透過查表，並且利用工程用計算機來理解對數問題。舉例來說，當教導學生了解 36 取對數值的概念時，如公式(9)，是否能跳脫傳統的計算方式，直接用查表或者計算機工具獲得數值。當然，在考試評量時，也得在同意學生可以使用計算機的考量上來命題。

$$\mathrm{log}36 = 1.55630250077 \ldots\ldots (9)$$

第三個例子討論排列組合的內容，此處為了讓數學更簡單，希望能從基本的加法原理、乘法原理、直線排列與組合教起，讓多數學生能理解排列組合基本觀念，而捨棄其它可由此推導出來觀念如重複組合、環狀排列等單元的教學。

例如，分析題目如三個小朋友來分 4 枝相同的原子筆共有幾種分法?若是用傳統代公式的作法，就如公式(10)的說明，學生必須先有 H 轉換成 C 的知識才有能力作答，這對多數學生而言因為公式太多反而失去學習數學的興趣了。

$$H_4^3 = C_4^6 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15 \ldots\ldots (10)$$

現在嘗試用最簡單的方法，先把 4 枝筆做直線排列，因為要分給三個小朋友，所以加入二個隔板把筆分成三堆，每人最多得 4 枝筆，也有可能得 0 枝筆。這樣一來，等於是把 4 枝筆加 2 個隔板共 6 件物品做有相同物的直線排列數，即可輕鬆算出答案來，不需要去背跟 H 相關的公式了。

總之，108 課綱的課程發展以核心素養為主軸，它是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。數學領域的課程目標在於培養學生具備數學的基本理念，來思考問題、分析問題及解決問題。基於此，期待捨棄過去教導冗長的計算方法，改用現代化的工具、簡單的數字，讓學生能學會數學，進一步培養學生日常生活應用與學習其他領域或科目所需的數學知能。